

Een wortelfunctie en haar inverse

8 maximumscore 3

- Voor punten op de grafiek van f geldt: $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 1}$$

1
 - Dit geeft $x^2 + 1 = \frac{1}{2}y^2$

1
 - Herleiden tot $y = \sqrt{2x^2 + 2}$ ($y = -\sqrt{2x^2 + 2}$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse)

1
- of
- Voor punten op de grafiek van g geldt: $y = \sqrt{2x^2 + 2}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband $x = \sqrt{2y^2 + 2}$

1
 - Dit geeft $x^2 - 2 = 2y^2$

1
 - Herleiden tot $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ ($y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse)

1
- of
- Er moet gelden $g(f(x)) = x$ (of $f(g(x)) = x$)

1
 - $g(f(x)) = \sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 - 1) + 2}$

1
 - Herleiden tot $\sqrt{x^2} = x$ ($\sqrt{x^2} = -x$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse)

1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

9 maximumscore 5

- $\frac{dPQ}{da} = 3\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \cdot 2a$ 2
- PQ is minimaal als $\frac{4a}{\sqrt{a^2-1}} = 3\sqrt{2}$ 1
- Herleiden tot $16a^2 = 18(a^2-1)$ 1
- Het antwoord $a = 3$ ($a = -3$ voldoet niet) 1

of

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2-1}} \cdot x$ 2
- PQ is minimaal als $f'(x) = 1$ 1
- $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2-1}} \cdot x = 1$ herleiden tot $x^2 = 4(\frac{1}{2}x^2-1)$ 1
- Hieruit volgt $x = 2$ ($x = -2$ voldoet niet), dus $P(2,1)$. Omdat P op de lijn met vergelijking $y = -x + a$ ligt, volgt $a = 3$ 1

of

- $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+2}} \cdot 4x$ 2
- PQ is minimaal als $g'(x) = 1$ 1
- $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+2}} \cdot 4x = 1$ herleiden tot $4x^2 = 2x^2 + 2$ 1
- Hieruit volgt $x = 1$ ($x = -1$ voldoet niet), dus $Q(1,2)$. Omdat Q op de lijn met vergelijking $y = -x + a$ ligt, volgt $a = 3$ 1

Opmerking

Voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten toekennen, tenzij de enige fout een rekenfout betreft (zie vakspecifieke regel 1). In dat geval mag 1 scorepunt worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

10 maximumscore 6

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^{1,41\dots} g(x) dx + \int_{1,41\dots}^7 (g(x) - f(x)) dx + \int_7^{10} (-x + 17 - f(x)) dx \quad 2$$

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan een vierkant van 10 bij 10 waarvan drie

$$\text{stukken worden afgehaald, ofwel } 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot \int_{1,41\dots}^{10} f(x) dx \quad 2$$

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1

- De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^7 g(x) dx + \int_7^{10} (-x + 17) dx - \int_{1,41\dots}^{10} f(x) dx$ 2

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of