

Drie keer over de lijn

Voor $x \geq 0$ en $a > 1\frac{1}{2}$ wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = |a - x^2| \cdot x + 3x$$

De grafiek van f_a heeft een knik met x -coördinaat $\sqrt{a}$. Deze knik verdeelt de grafiek van f_a in twee delen. Links van deze knik bevindt zich een top van de grafiek van f_a .

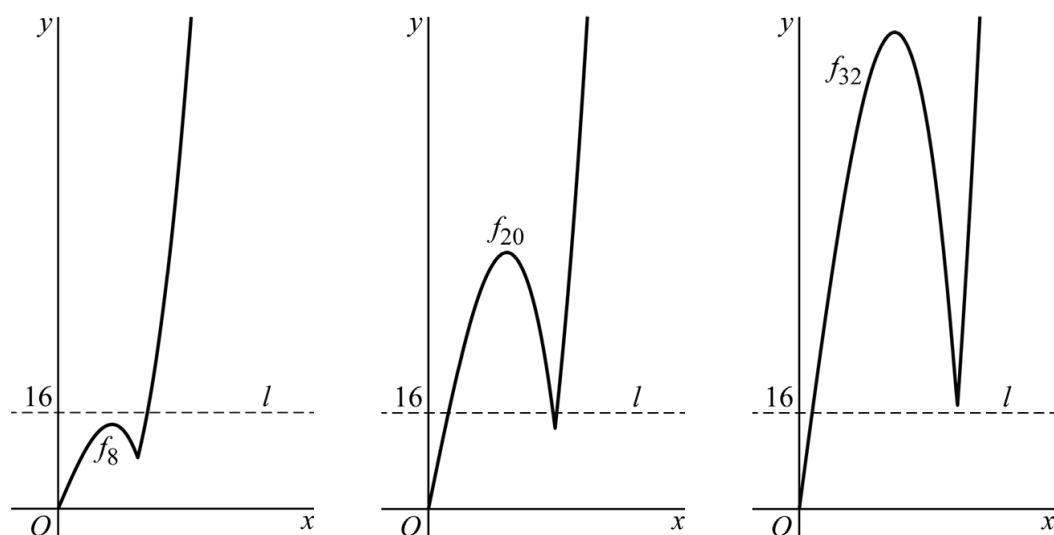
De y -coördinaat van deze top is te schrijven als:

$$y_{top} = 2\left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$$

5p **14** Bewijs dit.

In de figuur zijn de grafieken van f_8 , f_{20} en f_{32} en de lijn l met vergelijking $y = 16$ weergegeven.

figuur



Als a toeneemt, neemt de y -coördinaat $2\left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$ van de top toe.

Ook de y -coördinaat $f_a(\sqrt{a})$ van de knik neemt dan toe.

Het aantal gemeenschappelijke punten van de grafiek van f_a en lijn l hangt af van deze y -coördinaten. Zo snijden de grafiek van f_8 en lijn l elkaar in één punt. De grafiek van f_{20} snijdt lijn l in drie punten en de grafiek van f_{32} snijdt lijn l in één punt.

De waarden van a waarvoor de grafiek van f_a en lijn l drie snijpunten hebben, vormen een interval.

5p **15** Bereken exact dit interval.