

Bissectrice in een rechthoek

15 maximumscore 5

- Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dan volgt dat de coördinaten van D $(6, 1)$ zijn 1

- $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1

- $\cos(\angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ en

$$\cos(\angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad (\text{dus } \angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF}) = \angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}))$$

waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

of

- Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van D zijn $(6, 1)$ 1
- $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1
- Dus de lijn door E en P en de lijn door E en D zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn EF , dus de lijn door E en F is de bissectrice van hoek PED 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	De coördinaten van D zijn $(6, 1)$	1
	$\angle PEF = \angle EPC$ (Z-hoeken) dus $\tan(\angle PEF) = \tan(\angle EPC) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	1
	In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED = \angle PEF$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED)	1
	of	
	Uit de gelijkvormigheid van driehoek AOC met driehoek FOP volgt dat driehoek CPD gelijkbenig is, dus $DC = DP$	1
	Hieruit volgt $y_D = \frac{-2 + 4}{2} = 1$	1
	De coördinaten van D zijn $(6, 1)$	1
	In driehoek $P'EP$ (met P' de loodrechte projectie van P op het verlengde van EF) geldt: $\tan(\angle P'EP) = \frac{P'P}{P'E} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	1
	In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED = \angle P'EP$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED)	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

16 maximumscore 6

- Een vergelijking van c is $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ en een vergelijking van AC is $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 1
 - c snijden met AC geeft $(x-4)^2 + (-\frac{1}{2}x+2)^2 = 4$ dus $1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 16 = 0$ 1
 - Dit geeft $D(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}, 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5})$ 1
 - Driehoek FDD'' (met D'' de loodrechte projectie van D op OA) is gelijkvormig met driehoek FPO dus $\frac{PO}{FO} = \frac{DD''}{FD''}$ 1
 - Dit geeft $\frac{-p}{4} = \frac{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$ ofwel $\frac{-p}{4} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{4}$ 1
 - Dus $p = 2 - 2\sqrt{5}$ 1
- of
- Een vergelijking van PF is $y = -\frac{1}{4}px + p$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
 - Punt D is het snijpunt van AC met PF , dus moet gelden $-\frac{1}{4}px + p = -\frac{1}{2}x + 4$ 1
 - Dit geeft $D\left(\frac{4p-16}{p-2}, \frac{2p}{p-2}\right)$ 1
 - $MD = 2$ dus $\left(\frac{4p-16}{p-2} - 4\right)^2 + \left(2 - \frac{2p}{p-2}\right)^2 = 2^2$ 1
 - Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\frac{64}{(p-2)^2} + \frac{16}{(p-2)^2} = 4$ 1
 - $p = 2 - \sqrt{20}$ ($p = 2 + \sqrt{20}$ voldoet niet) 1
- of
- $rc_{ED} = -rc_{EP} = -\frac{4-p}{4} = \frac{p-4}{4}$ 1
 - $rc_{PF} = \frac{-p}{4}$ 1
 - Punt M is het midden van EF , dus EF is de middellijn van de cirkel 1
 - D ligt op de cirkel, dus geldt $\angle FDE = 90^\circ$ 1
 - Er moet dus gelden dat $rc_{ED} \cdot rc_{PF} = \frac{p-4}{4} \cdot \frac{-p}{4} = -1$ 1
 - Dan volgt $p = 2 - \sqrt{20}$ ($p = 2 + \sqrt{20}$ voldoet niet) 1
- of